مهدی مفیدی احمدی،
کارشناس پژوهش‌سرای ملاصدرا
مدرس خانهٔ ریاضیات و دبیر ریاضی ناحیه ۲ زنجان

راهبرد نقطه ثابت در حل یک مسئله

پژوهش دانش‌آموزی

چکیده

با توجه به اهمیت بسیار زیاد انجام پژوهش توسط دانش‌آموزان، سعی داریم در چند قسمت به پژوهش‌های کوچک ریاضی در سطح دانش‌آموزی بپردازیم. در قسمت اول این مقاله ابتدا روش کار را توضیح می‌دهیم. سپس با ارائهٔ یک مسئله و تحلیل دقیق راهبرد حل آن، سؤال‌هایی را مطرح خواهیم کرد. با این هدف که گروه‌های پژوهشی معلمان یا دانش‌آموزان با پیگیری این سؤال‌ها موضوع را توسعه دهند و خود نیز سؤال‌های جدیدتری مطرح کنند. مسئله‌ای که «راهبرد حل» آن را در این بخش تحلیل خواهیم کرد، مسئلهٔ جالبی از توابع است: «هیچ تابعی با دامنهٔ اعداد حقیقی وجود ندارد که از ترکیب آن با خودش، تابعی با ضابطهٔ x^2-2 به دست آید.»

کلیدواژه‌ها پژوهش‌های، تابع، نقطهٔ ثابت یک تابع، ترکیب توابع

مقدمه

انجام پژوهش‌های دانش‌آموزی از آرزوهای بزرگ ما معلمان است! همواره در ذهن خود کلاسی را آرزو کرده‌ایم که دانش‌آموزان آن کلاس، نه‌تنها از لحاظ اخلاقی و تربیتی نمونه باشند، بلکه مفاهیم مطرح شده در کلاس را نیز با «جدیت» پیگیری کنند، در درس ما خلاقیت به خرج دهند، کار گروهی یکی از عادت‌های آن‌ها باشد، فقط به ظاهر مباحث علمی توجه نکنند، در آن مبحث سؤال‌های جدید طرح کنند و در یک کلام، «پژوهشگر» باشند. البته به دلایل متعدد، کلاس‌های ما این‌گونه نیست. صادقانه بگوییم، یکی از دلایل آن، دقیقاً خود ما معلمان هستیم. عادت به پژوهش- حتی پژوهش‌های مقدماتی و دانش‌آموزی- در میان ما کم‌رنگ است. بنابراین نمی‌توان خیلی از دانش‌آموز انتظار پژوهشگری داشت.

عادت به پژوهش و پرسشگری علمی در محیط مدرسه و لذت سحرآمیز و غیرقابل وصف آن را دانش‌آموز ابتدا از معلم خود آموزش می‌بینند. البته در این بین منابع پژوهشی ما نیز به شدت نقص دارند. اغلب معلمان منابع مناسب، ساده و روانی در این زمینه برای پژوهش‌های کوچک دانش‌آموزی در اختیار ندارند و باید در جهت رفع این کمبود کوشید. هدف این مقاله نیز دقیقاً همین است؛ نویسنده سعی دارد به کمک همکاران، دانش‌آموزان و دانش‌جویان عزیز پژوهشگر، در سلسله مقالاتی در حد توان، این نقیصه را برطرف کند؛ ان‌شاءالله.

به توضیحاتی پیرامون روش و محتوای این سلسله مقالات توجه فرمایید:

- نگارش مفاهیم پژوهشی در این سلسله مقالات به زبان دانش‌آموزی است و سعی ما توضیح مطالب به‌صورت ساده، همراه با تصویرهای گویا خواهد بود. می‌کوشیم علت اثبات قضایا، روش آن‌ها و چگونگی پژوهش در آن موضوع خاص را خاطرنشان کنیم. اگر در «پژوهک‌نامه»ها از نرم‌افزاری استفاده کرده

باشیم، آن را معرفی می‌کنیم و در صورت لزوم دستورات مربوط به آن را خلاصه‌وار خواهیم آورد تا تأکید کنیم که استفاده از ICT در جهان کنونی برای پژوهشگر از واجبات است.

- با اینکه بسیار سخت است، اما تلاش می‌کنیم که از مفاهیم کتاب‌های رسمی ریاضی آموزش‌وپرورش خارج نشویم؛ به گونه‌ای که معلمان و دانش‌آموزان پس از مطالعهٔ آن ـ با کمترین نیاز به منابع بیرونی ـ به ایده‌های پژوهشی «ناب» دست یابند و خودشان در گروه‌های پژوهشی، آن‌ها را دنبال کنند و به نتیجه برسانند. به همین دلیل غالباً در «انتهای موضوع» یک سؤال باز مرتبط با موضوع مطرح و حل و بحث آن به گروه‌های پژوهشی سپرده می‌شود. امیدواریم این گروه‌ها حاصل کار خودشان را برای مجله ارسال فرمایند.

- جامعهٔ هدف، دانش‌آموزان و معلمان در محیط مدرسه، دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه‌های علمی کشوری، همچون جشنوارهٔ جوان خوارزمی، پژوهش‌سراهای دانش‌آموزی، خانه‌های ریاضیات و گروه‌های آموزشی ریاضی مستقر در ادارهٔ کل آموزش‌وپرورش استان‌هاست.

از خداوند متعال در این امر خطیر یاری می‌طلبیم که «... إِنْ أُرِیدُ إِلاَّ الإِصْلاَحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِیقِی إِلاَّ بِاللّهِ عَلَیْهِ تَوَکَّلْتُ وَإِلَیْهِ أُنِیبُ» **(هود، ۸۸)**.

بلکه فقط تا آنجا که در توانم باشد خواستار اصلاح جامعه هستم، و البته توفیقم فقط به لطف خدا بستگی دارد، تنها بر او توکل می‌کنم و فقط به‌سوی او باز می‌گردم.

موضوع پژوهش ما از کجا آغاز شد؟

سال‌ها پیش در یکی از سایت‌ها (که آدرس آن را هم فراموش کرده‌ام!) به این مسئله و حل آن برخوردم که: «ثابت کنید هیچ تابعی با دامنهٔ عددهای حقیقی وجود ندارد که از ترکیب آن با خودش، تابع $x^2 - ۲$ به‌دست آید.» مسئله‌ای شیک! با ظاهری ساده و فریبنده، اما باطنی عمیق و پردردسر! پردردسر از این لحاظ که حل آن، از این حل‌های معمولی و محاسبه‌های پیچیدهٔ تابعی نبود که فقط یک بار بررسی شود و تمام. حل آن بسیار زیرکانه و عمیق بود، به‌گونه‌ای که ذهنم را حسابی قلقلک می‌داد برای بررسی دقیق‌ترش؛ راهبردی که معمولاً برای حل این‌گونه مسائل استفاده نمی‌شود، اما به‌صورت اعجاب‌انگیزی تواناست! این راهبرد چیزی نبود

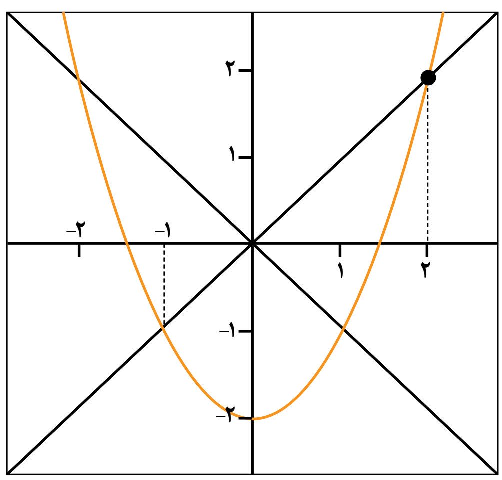
جز «نقطهٔ ثابت» که یکی از عمیق‌ترین مفاهیم ریاضیات است و ریاضی‌دان‌های زیادی را واله و شیدای خود کرده است. این مقاله و قسمت دوم آن، نتیجهٔ بررسی‌های «موشکافانهٔ» بنده است. اما این «نقطهٔ ثابت» چیست؟

اگر تابع (با دامنه و برد حقیقی) را مانند یک ماشین ورودی و خروجی در نظر بگیرید، این ماشین عددهای دامنهٔ خود را می‌گیرد و با توجه به ضابطه‌اش، عدد دیگری را تحویل می‌دهد. اگر عدد ورودی به ماشین پس از خروج تغییر نکند، آن را «نقطهٔ ثابت» تابع می‌گوییم؛ به‌طور دقیق‌تر:

تعریف. عدد c را «نقطهٔ ثابت» تابع f گوییم اگر: $f(c)=c$ یا $f(c)-c=۰$.

چند مثال. همین تابع $f(x)=x^{۲}-۲$ را با دامنهٔ R در نظر بگیرید. برای محاسبهٔ نقطهٔ ثابت آن، باید عدد c را چنان بیابیم که: $f(c)-c=c^{۲}-۲-c=۰$. یعنی نقطه‌های ۲ و ۱- «نقطه‌های ثابت» تابع f هستند. مثال زیبای دیگر، تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۱$ با دامنهٔ $R-\{۰\}$ با دو نقطهٔ ثابت است که یکی از آن‌ها، همان «نسبت طلایی» معروف است؛ یعنی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. (چرا؟) البته همهٔ توابع نقطهٔ ثابت ندارند. مثلاً $g(x)=x-۲$ نقطهٔ ثابت ندارد. (چرا؟) بعضی توابع نیز فقط یک نقطهٔ ثابت دارند، مانند تابع $h(x)=-x$. (چرا؟).

آیا می‌توان با استفاده از شکل تابع، متوجه شد که نقطهٔ ثابت دارد یا نه؟



شکل ۱

بله، کافی است ببینیم نیم‌ساز ربع اول و سوم، تابع را قطع می‌کند یا نه. (چرا؟) به تعداد نقطه‌های برخورد، نقطهٔ ثابت (حقیقی) داریم، زیرا «نقطهٔ ثابت» براساس تعریف، همان جواب معادلهٔ $f(x)-x=۰$ یا $f(x)=x$ است.» شکل ۱ که با استفاده از «نرم‌افزار جئوجبرا» رسم شده است، نقطه‌های ثابت تابع $f(x)=x^{۲}-۲$ را با دامنهٔ R نشان می‌دهد؛ کدام نقطه‌ها؟

در همین جا به اولین سؤال جدی مقاله پاسخ دهید:

سؤال ۱. تابع درجهٔ ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با چه شرطی نقطهٔ ثابت دارد و برعکس، اگر تابع درجهٔ ۲ نقطهٔ ثابت داشته باشد، چه ارتباطی بین ضرایب آن وجود دارد؟

بررسی آن برعهدهٔ شما. توجه کنید که به جواب این سؤال در ادامهٔ پژوهش نیازمندیم.

حال که با نقطهٔ ثابت یک تابع تا حدی آشنا شدیم، به حل مسئلهٔ اصلی بپردازیم و ببینیم که:

اولاً این نقطه چگونه در حل مسئله به ما کمک می‌کند؟

ثانیاً آیا می‌توان با استفاده از آن، «سؤال جدید مناسبی» طرح و آن را حل کرد؟ ابتدا به دو مسئله و حل آن اشاره می‌کنیم که در طول مقاله به آن‌ها محتاجیم:

مسئلهٔ ۱: عبارت $x^{۳}+۲x^{۲}-۱$ را تجزیه کنید.

حل: کافی است عبارت مناسبی را به آن اضافه و کم کنید (تساوی‌های زیر را توضیح دهید):

$$x^{۳}+۲x^{۲}-۱=(x^{۳}+x^{۲}-x)+(x^{۲}+x-۱)$$
$$=(x^{۲}+x-۱)(x+۱)$$

مسئلهٔ ۲: ترکیب توابع شرکت‌پذیر است.

حل: توضیح دهید که چرا برای هر سه تابع f، g و h می‌توان نوشت: $fo(goh)=(fog)oh$ (البته اگر شرایط ترکیب را داشته باشند).

مسئلهٔ اصلی

تابع $f:R\to R$ با این خاصیت که $f(f(x))=x^{۲}-۲$ وجود ندارد.

حل: حل مسئله به روش برهان خلف است. یعنی

ابتدا فرض می‌کنیم، تابعی با این ویژگی‌ها وجود دارد و سپس با طی کردن مراحلی به تناقض اصلی می‌رسیم. پس فرض کنید تابعی مانند $f:R\to R$ وجود دارد که پس از ترکیب آن با خودش، به تابع $x^۲-۲$ رسیده‌ایم. برای درک بهتر استدلال، حل مسئله را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم.

- **مرحلهٔ اول: ساخت تابع جدید g با استفاده از f**

ترکیب f با خودش را g بنامید؛ یعنی g=fof. پس برای هر $x\in R$ داریم: $g(x)=f(f(x))=x^۲-۲$. می‌توان نوشت: fog=gof. (چرا؟)

- **مرحلهٔ دوم: بررسی ویژگی نقطه‌های ثابت g**

نقطه‌های ثابت g را در ابتدای مقاله به‌دست آوردیم: نقطه‌های ۲ و ۱- (به شکل ۱ توجه کنید). پس: g(۲)=۲ و g(-۱)=-۱ با کمی دقت می‌توان دید که f(-۱) و f(۲) نیز نقطه‌های ثابت g هستند. برای مثال، با توجه به مرحلهٔ اول داریم:

$$g(f(-۱))=f(g(-۱))=f(-۱)$$

پس اگر x نقطهٔ ثابت g باشد، f(x) نیز نقطهٔ ثابت g است. حال چون g دقیقاً دو نقطه ثابت دارد، می‌توان نوشت:

$$\{f(-۱),f(۲)\}\subseteq\{-۱,۲\} \qquad (*)$$

- **مرحلهٔ سوم: ساخت تابع جدید h با استفاده از g و نقطه‌های ثابت این تابع جدید**

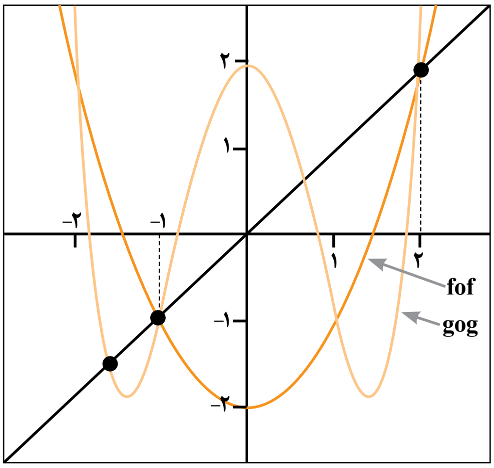
ترکیب g با خودش را h بنامید (یعنی h=gog) و نقطه‌های ثابت h را به‌دست آورید. پس باید معادلهٔ $h(x)-x=۰$ را حل کنید (از مسئلهٔ ۱ کمک بگیرید):

$$(x^۲-۲)^۲-۲-x=(x-۲)(x^۲+x-۱)(x+۱)=۰$$

بنابراین نقطه‌های ثابت h عبارت‌اند از:

$$\left\{-۱,۲,\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\}$$

در شکل ۲ مشخص است که نقطه‌های ثابت g=fof در میان نقطه‌های ثابت h=gog هستند. به‌عبارت دیگر در شکل ۲، دو نقطه وجود دارد که از آن‌ها هم تابع g، هم تابع h و هم نیمساز ربع اول سوم عبور می‌کنند. (کدام نقطه‌ها؟ در شکل ۲ نشان دهید.)



شکل ۲

این واقعیت را می‌توان به‌عنوان یک مسئله در حالت کلی مطرح کرد که حل آن بر عهدهٔ خودتان.

مسئلهٔ ۳: ثابت کنید برای هر تابع f، نقطه‌های ثابت f، زیر مجموعهٔ نقطه‌های ثابت fof هستند؛ به شرطی که ترکیب، قابل تعریف باشد. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ fof(x)-x=۰ شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ f(x)-x=۰ است.

حال با توجه به این دو واقعیت که مجموعهٔ $\{-۱,۲\}$، مجموعهٔ نقطه‌های ثابت g است و foh=hof (چرا؟)، مشابه استدلال مرحلهٔ دوم بررسی کنید که اعضای مجموعهٔ

$$\left\{f(-۱),f(۲),f(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}),f(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})\right\}$$

نقطه‌های ثابت h هستند (که البته ممکن است متمایز نباشند). بنابراین:

$$\left\{f(-۱),f(۲),f(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}),f(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})\right\}\subseteq$$
$$\left\{-۱,۲,\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\} \qquad (**)$$

- **مرحلهٔ چهارم: رسیدن به تناقض اصلی و تکمیل حل مسئله**

فرض کنید که: $x\in\left\{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\}$. پس x نقطهٔ ثابت g نیست؛ با توجه به (**)،

یا $f(x)\in\{-1,2\}$ ، و یا $f(x)\in\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

- **حالت اول:** اگر $f(x)\in\{-1,2\}$ ، پس f(x) نقطهٔ ثابت g است. لذا با توجه به (*) در مرحلهٔ دوم، مسئلهٔ ۲ و اینکه fog=gof، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x &= h(x)=g(g(x))=g(f(f(x))) \\ &= f(g(f(x)))=f(f(x))=g(x) \end{aligned}$$

که تناقض است، زیرا x نقطهٔ ثابت g نیست.

- **حالت دوم:** اگر $f(x)\in\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2},-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$ ، پس f(x) نقطهٔ ثابت g نیست. در این حالت داریم: f(x)≠x (چرا؟). در نتیجه:

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ f\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

پس:

$$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=fof\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

که تناقض است، زیرا $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ نقطهٔ ثابت g نیست.

چون تنها همین دو حالـت وجود دارند و از هر دو حالت به تناقض رسیدیم، اساساً تابع f وجود ندارد.

بررسی راهبرد حل مسئلهٔ اصلی

در حل مسـئلهٔ اصلـی، میان نقطه‌هـای ثابت دو بار ترکیب f با خـودش ـ که g نامیدیم ـ نقطه‌های ثابت چهار بار ترکیب f با خودش ـ که h نامیدیم ـ ارتباط‌هایی یافتیم؛ مشخص شد که:

الف) fof دقیقاً دارای دو نقطهٔ ثابت اسـت (یا بهتر است بگوییم حداقل یک نقطهٔ ثابت دارد).

ب) «چهار بار ترکیب f با خودش» دقیقاً دارای چهار نقطهٔ ثابت اسـت (یا بهتر بگوییم دارای نقطهٔ ثابتی، غیر از نقطه‌های ثابت fof است).

سـپس بـا اسـتفاده از ایـن ارتباطـها بـه تناقـض اصلـی رسـیدیم و ثابـت کردیـم هیـچ تابعـی بـا دامنهٔ R وجـود نـدارد کـه از ترکیـب آن با خـودش تابع x^2-2 بـه‌دسـت آیـد.

نکتهٔ جالب: اگر به برهان مسئله توجه کنید، در می‌یابید که خیلی از نقطه‌های ثابت fof استفاده نکردیم، زیرا رسـیدن به تناقض اصلی، براساس یک نقطـهٔ ثابت «چهار بار ترکیب f با خودش»، خارج از نقطه‌های ثابتِ fof بود! همین نکتهٔ مهم ممکن است در تعمیم مسئله به حالت کلی‌تر، ما را یاری کند.

حالا با توجه به حل مسئلهٔ اصلی و توضیحات بالا دو سؤال زیر را مطرح می‌کنیم:

سؤال ۲. با چـه شرایطی یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲، هیچ‌گاه به صورت fof نیسـت؟ (کـه در اینجا f تابعی با دامنهٔ R است.)

سؤال ۳. آیا می‌توان گفت تابعی مانند f با دامنهٔ R که دارای خاصیت (ب) باشد، موجود نیست؟

در قسـمت بعـدی مقالـه سـعی می‌کنیـم «تاحدی» بـه دو سـؤال بـالا جـواب دهیـم، امـا قبـل از آن، دست بـه کار شـوید و بـا اسـتفاده از ایده‌هایـی کـه گرفته‌ایـد، خودتـان بـه این دو سـؤال پاسـخ دهید؛ ابتدا مسـئلهٔ زیر را حـل کنید:

مسـئلهٔ ۴: ثابت کنید که تابع f:R→R با این خاصیت که $f(f(x))=x^2+x-2$ وجود ندارد.

و نکتـهٔ آخر اینکه توصیف لذت عجیبی که در حل و طرح مسـائل بالا وجود دارد (البته در کنار فایده‌های زیاد دیگـری که دارد)، تقریباً غیرممکن اسـت و اتفاقاً همین لذت، قدرت تحمل می‌دهد و پژوهشگر را به ادامهٔ کار فرا می‌خواند! از این نکتهٔ مهم نیز غافل نشـویم که اگر بتوان لذت پژوهش را به دانش‌آموز چشـاند، بعید است او از آن چشم بپوشد.